Die grundlegende Idee dieses Rätsels ist, dass es Kartenspiele gibt, die sich stark ähneln, und ich möchte herausfinden, wie viele Spiele ich alle in nur 120 Karten unterbringen kann.

Es gebe daher 120 Karten $[n] := \mathbb{N}^{\leq n}$ für $n = 120$ im Universalkartenspiel.

Außerdem gibt es $m \in \mathbb{N}$ viele Eigenschaften $A_1, ..., A_m$ mit $0 \in A_i \subset \mathbb{N}_0$ und $|A_i| < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}^{\leq m}$.

Bsp.: $A_{17} = \{0, 1, 2, 3, 4, 10\}$ könnte die Eigenschaft "Blattfarbe" sein, mit $0 = \text{leer}, 1 = \text{Eichel}, 2 = \text{Blatt}, 3 = \text{Herz}, 4 = \text{Karo}, 10 = \text{Joker}$.

Technisch ist auf jeder Karte jede Eigenschaft vertreten. Wir setzen sie auf 0, um zu signalisieren, dass die Eigenschaft auf dieser Karte nicht wichtig ist.

Betrachten wir nun die externen Spiele, die in das Universalkartenspiel eingeordnet werden sollen. Sei die Menge all dieser Spiele

$$\mathcal{G} := \{G_1, ..., G_p\} \text{ für ein } p \in \mathbb{N}$$

wobei ein Spiel G_i für $i \in \mathbb{N}^{\leq p}$ definiert ist durch eine Menge an Karten (Cards):

$$G_i := \{C_1, ..., C_{q_i}\} \text{ für eine Anzahl } q_i \in \mathbb{N}^{\leq n} \text{ von Karten im Spiel } G_i$$

Eine Karte wiederum ist definiert als Tupel aus dem direkten Produkt aller Eigenschaften

$$C_j \in \prod_{k=1}^{m} A_k \text{ für } j \in \mathbb{N}^{\leq q_i}$$

Wir schreiben $C_j(l)$ mit $l \in \mathbb{N}^{\leq m}$, um den Wert der Karte in der l. Eigenschaft zu erhalten.

Bsp.: Bei drei Eigenschaften A_1, A_2, A_3 könnte eine Karte Beispielsweise so aussehen: $C_8 = (0, 5, 4)$. Also: $C_8(1) = 0, C_8(2) = 5, C_8(3) = 4$.

Eine **Zuordnung** φ_i ordnet die Karten aus einem Spiel G_i auf die Karten in $[n]$ zu. Sie ist injektiv, denn alle Karten sollen ja auch im Universalkartenspiel erhalten bleiben.

$$\varphi_i : G_i \xrightarrow{\text{inj.}} [n]$$

Eine **Gesamtzuordnung (GZ)** ist eine Tupel

$$(\varphi_1, ..., \varphi_p) : \prod_{i=1}^{p} (G_i \longrightarrow [n])$$

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, unter gegebenen Karten $[n]$, Eigenschaften $A_1, ..., A_m$ und Spielen $\mathcal{G}$, eine Gesamtzuordnung zu finden, die auf bestimmte Wünsche optimiert ist.

Def. 1) Eine GZ heißt **funktionierend** genau dann wenn für alle zwei Karten verschiedener Spiele gilt, dass sie sich in keiner Eigenschaft widersprechen dürfen, wenn sie auf die selbe Karte im Universalkartenspiel abgebildet werden. Eine Ausnahme ist der Wert 0.

$$\forall i, i' \in [p] : \forall j \in [q_i], j' \in [q_{i'}] : \forall \tilde{m} \in [m] :$$
$$i \neq i' \text{ und } \varphi_i(C_j) = \varphi_{i'}(C_{j'}) \text{ und } C_j(\tilde{m}) \neq 0 \neq C_{j'}(\tilde{m}) \Longrightarrow C_j(\tilde{m}) = C_{j'}(\tilde{m})$$

Karten verschiedener Spiele werden im Universalkartenspiel also zusammenmerged: Entweder sie haben den selben Wert in einer Eigenschaft oder mindestens eine Karte hat diese Eigenschaft nicht, d.h. der Wert ist 0.

Es ergibt wenig Sinn im folgenden von GZ zu sprechen, die nicht funktionierend sind. Sei von nun an also von funktionierenden GZ (fGZ) die Rede.

Zunächst können wir die etwas umständliche Schreibweise reduzieren. Haben wir eine fGZ gefunden, so entsteht dadurch das Universalkartenspieldeck.

Def. 2) Die **Karten einer fGZ** sind $K_1, ..., K_n$, definiert wie die externen Spielkarten als Tupel

$$K_i \in \prod_{k=1}^{m} A_k \text{ für alle } i \in [n]$$
$$\text{mit } \forall t \in [p] : \forall s \in [q_t] : \forall k \in [m] : (\varphi_t(C_s) = i \text{ und } C_s(k) \neq 0 \Longrightarrow K_i(k) = C_s(k))$$

Die Definition stellt sicher, dass alle Universalkarten das selbe Format haben wie die externen Spielkarten. An den entsprechenden Stellen im Tupel sind die Werte eingeschrieben, die durch die Zuordnungen zugeordnet wurden.

Def. 3) Eine **Zuordnungsbedingung** L (kurz Bedingung) ist ein Tupel

$$L = (a, b, c, d, \sim) \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{N}, \sim \in \{<, \leq, =, \neq, \geq, >\}$$

Wir sagen, dass eine fGZ Bedingung L **erfüllt**, genau dann wenn für alle Karten gilt: Ist die a. Eigenschaft b, dann muss für die c. Eigenschaft gelten, sie sei $\sim$ zu d, d.h.

$$\text{fGZ erfüllt } L :\Longleftrightarrow (\forall i \in [n] : K_i(a) = b \Longrightarrow K_i(c) \sim d)$$

Bsp.: Die Bedingung $L = (2, 3, 4, 8, =)$ wird bei den Karten $K_1 = (1, 3, 2, 8, 0, 2)$, $K_2 = (3, 3, 8, 0, 2, 1)$ nur in der ersten Karte erfüllt, da $K_1(2) = 3$ und $K_1(4) = 8$. Auch $K_2(2) = 3$ aber $K_2(4) = 0 \neq 8$.

Def. 4) Einige Eigenschaften nennen wir **Sortiereigenschaften**. Dazu gehören alle A_i mit $i \in I$ für eine Teilmenge $I \subseteq [m]$. Die **Sortiersumme** sei die Summe aller Werte dieser Sortiereigenschaften pro Karte:

$$S : [n] \longrightarrow \mathbb{N}_0 \text{ mit } S(x) := \sum_{i \in I} K_x(i)$$

Das **Sortiermaximum** $\mathcal{M}$ einer fGZ ist genau die größte Sortiersumme einer Karte im Universalkartenspieldeck:

$$\exists j \in [n] : S(j) = \mathcal{M} \text{ und } \forall i \in [n] : S(i) \leq \mathcal{M}$$
$$\text{oder: } \mathcal{M} = \max\{S(i) | i \in [n]\}$$

Eine fGZ heißt **sortierminimal**, wenn das Sortiermaximum im Universalkartenspieldeck nicht mehr reduzierbar ist durch Wahl einer anderen fGZ, d.h.

$$\mathcal{Z} \text{ sortierminimal} :\Longleftrightarrow \forall (\mathcal{Z}' : \text{fGZ}) : \mathcal{M}_{\mathcal{Z}'} \geq \mathcal{M}_{\mathcal{Z}}$$

Bsp.: Betrachten wir das vorangegangene Beispiel, so ist für $I = \{5, 6\} : S(1) = 0 + 2$ und $S(2) = 2 + 1$. Für beide Karten ist also das Sortiermaximum $\mathcal{M} = 3$

Die Fragen, die ich mir nun stelle:

1) Unter gegebenen Karten $[n]$, Eigenschaften $A_1, ..., A_m$ und Spielen $\mathcal{G}$, **(wie) lässt sich dafür eine fGZ finden?**
2) Für eine gegebene Menge $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_l\}$ an Bedingungen, **lässt sich eine fGZ finden, sodass alle Bedingungen erfüllt sind?**
3) **Wie lässt sich dazu eine sortierminimale fGZ finden, die Punkt 2) erfüllt?**